Adı-Soyadı: **08.04.2018**

Numarası : **Nümerik Analize Giriş Arasınav Soruları**

1) $i \neq j, x_i \neq x_j$ olmak üzere $(x_i, f_i), i = 0,1,2,...,n$ ayrık noktaları veriliyor. Bu ayrık noktalar nasıl olmalı ki bu ayrık noktalardan geçen interpolasyon polinomunun derecesi kesinlikle a) sıfır , b) 1, c) n-1 olsun.

2) $f(x) = 1 - x^2$ şeklinde bir polinom olduğuna göre kalan terimin sıfır olması için en az kaç tane ayrık nokta olmalıdır? Neden?

$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$

3) $f(x) = 2^{-x}$ fonksiyonu ve ayrık noktaları veriliyor. $\sqrt{2}$ değerini uygun interpolasyon polinomu yardımıyla bulunuz.

4) $3^x + x = 0$ denkleminin $[-1,0]$ aralığında bir reel kökünün ~~..~~ ayrık noktalar $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ olmak üzere bu kökü uygun interpolasyon polinomu yardımıyla bulunuz.

5) $i = 0,1,2,3$ $x_i = i$, $P_{01}(x) = 2x - 1$, $P_{12}(x) = 3x - 2$, $P_{123}(0,5) = 3$, $P_{0123}(0,5) = ?$, $f_i = ?, i = 0,1,2,$ ~~3~~ $P_{23}(0,5) = ?$

6) $x_i = x_0 + ih$ olmak üzere $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+m}] = \dfrac{\Delta^m f_i}{h^m m!}$ olduğunu gösteriniz.

NOT: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

***)Şu ana kadar görmüş olduğunuz matematik derslerinin hayatınıza katkısının olup olmadığını açıklayınız.**

Başarılar. N.A.

1) $n+1$ tane (x_i, f_i), ayrık noktalarından derecesi n yi geçmeyen bir tek polinom geçer. Bu polinomu

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ şek. gösterelim. (x_i, f_i) ayrık nok. geçeceğine göre $P_n(x_i) = f_i$ $i = 0,1,2,\dots,n$ eşitliği der.

$$\begin{aligned} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 &= f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 &= f_1 \\ &\vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 &= f_n \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}}_{W(x) \neq 0} \cdot \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada

$$a_n = \frac{1}{W(x)} \overbrace{\begin{vmatrix} f_0 & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ f_1 & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ f_n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}}^{A_n}, \quad a_{n-1} = \frac{1}{W(x)} \underbrace{\begin{vmatrix} x_0^n & f_0 & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & f_1 & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \\ x_n^n & f_n & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}}_{A_{n-1}}, \dots, a_1 = \frac{1}{W(x)} \underbrace{\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & f_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & f_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & f_n & 1 \end{vmatrix}}_{A_1}$$

$$a_0 = \frac{1}{W(x)} \overbrace{\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & f_0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & f_1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & f_n \end{vmatrix}}^{A_0}$$

olur. a) $P_n(x) = a_0$ olması için $a_n = \dots = a_1 = 0$ $a_0 \neq 0$ olmalıdır. Burada $f_0 = f_1 = \dots = f_n = a_0$ olmalıdır yani ayrık noktalar (x_i, a_0) şek olmalıdır. b) $P_n(x) = a_1 x + a_0$ olması için $a_n = \dots = a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ olmalıdır. Bunun için de $f_0 = a_1 x_0 + a_0$, $f_1 = a_1 x_1 + a_0$, $\dots$, $f_n = a_1 x_n + a_0$ olmalıdır. Gerçekten $A_n = 0$, $A_{n-1} = 0 \dots$ $A_2 = 0$, $A_1 \neq 0$, $A_0 \neq 0$ olur. ~~Dolayısıyla~~

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 x_0 + a_0 & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ a_1 x_n + a_0 & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix},$$

son iki sütun toplamı birinci sütuna eşit olduğundan det $= 0$ dır.

c) $P_n(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ olması için sadece $A_n = 0$, $A_{n-1} \neq 0 \dots A_1 \neq 0$, $A_0 \neq 0$ olmalıdır. Bunun içinde $f_i = a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0$ olmalıdır.

$(x_i, a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0)$ olmalıdır.

2) (x_i, f_i) ayrık nok. kasılık pek. int. polinom ②

$P_n(x)$ olsun. Kalan terim ise

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n) \text{ dir}$$

$f(x) = 1-x^2$ yani ikinci dereceden bir polinom old. dan.

$R_n(x) = 0$ olması için $f'(x) = -2x$, $f''(x) = -2$, $f'''(x) = 0, \ldots = 0$

old. dan. $n+1 = 3$ olur. $n = 3-1 = 2$ dir. O halde en az ayrık nokta sayısı üç tane olmalıdır.

3) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

x_i	-1	0	1
f_i	2	1	$1/2$

~~y_i 2 1 1/2, $f^{-1}(y_i)$ -1 0 1~~

$\sqrt{2} = 2^{-(-1/2)} = f(-1/2)$ olur. O halde $x = -1/2$ nok. değerini int. pol. yardımıyla hesaplamamız gerekir.

$-1 < x = -1/2 < 0$ arasında olduğu için (tablonun baş tarafına yakın old.dan) ileri fark int. polinomu uyg. edelim.

$P_2(x) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 f_0$, $x = x_0 + th$, $h = x_{i+1} - x_i = 1$ $x_0 = -1$ old.d.

$-\frac{1}{2} = -1 + t \cdot 1 \Rightarrow t = 1 - 1/2 = 1/2$

-1	2	$\Delta f_0 = 1-2 = -1$	$\Delta^2 f_0 = -1/2 + 1 = 1/2$
0	1	$\Delta f_1 = 1/2 - 1 = -1/2$	
1	$1/2$		

$P_2(-1/2) = f_0 + 1/2 \Delta f_0 + \frac{1/2(1/2-1)}{2}\Delta^2 f_0$

$P_2(-1/2) = 2 + 1/2 \cdot (-1) + \frac{1/2 \cdot -1/2}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{32-8-1}{16} = \frac{23}{16} \approx \sqrt{2}$ dir.

4) $3^x + x = 0$ kökü $[-1, 0]$ da vardır. $f(x) = 3^x + x$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

x_i	-1	0	1
f_i	$3^{-1}-1$	1	4

$f(x_*) = 0$, $x_* = ?$ $x_* = f^{-1}(0)$ olur, Ters int. pol. uyg.

$f(x_i) = y_i \Rightarrow x_i = f^{-1}(y_i)$

y_i	$-2/3$	1	4
$x_i = f^{-1}(y_i)$	-1	0	1

, $y = 0$ da $P_2(0) = ?$

x_i ayrık noktalar eşit aralıklı olmadığı için ya bölünmüş fark ya da Lagrange int. pol. uyg. Lagrange int. pol. uyg.

~~$P_2(y) = (y-(-2/3))(y$~~ $P_2(y) = \frac{(y-1)(y-4)}{(-2/3-1)(-2/3-4)}(-1) + \frac{(y-(-2/3))(y-4)}{(1+2/3)(1-4)} \cdot 0 + \frac{(y+2/3)(y-1)}{(4+2/3)(4-1)} \cdot 1$

$P_2(0) = \frac{-1 \cdot -4}{\frac{-5}{3} \cdot \frac{-14}{3}}(-1) + 0 + \frac{2/3 \cdot (-1)}{\frac{14}{3} \cdot 3} = -\frac{36}{5 \cdot 14} - \frac{2}{3 \cdot 14} = -\frac{36 \cdot 3 + 10}{3 \cdot 5 \cdot 14} = -\frac{118}{210}$

(3)

5) $i = 0,1,2,3$, $x_i = i$ $\quad P_{0123}(0,5) = \frac{1}{x_3 - x_0}\begin{vmatrix} P_{012}(0,5) & x_0 - 0,5 \\ P_{123}(0,5) & x_3 - 0,5 \end{vmatrix}$

$$P_{012}(0,5) = \frac{1}{2-0}\begin{vmatrix} P_{01}(0,5) & 0-0,5 \\ P_{12}(0,5) & 2-0,5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$

$P_{01}(x) = 2x-1 \quad P_{01}(0,5) = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 0$

$P_{12}(x) = 3x-2 \quad P_{12}(0,5) = 3\cdot\frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$$P_{0123}(0,5) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1/8 & -1/2 \\ 3 & 3-1/2 \end{vmatrix}$$

$$P_{0123}(0,5) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{2} + 3/2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{24-5}{16}\right) = \frac{19}{48}$$

$$P_{01}(x) = \frac{1}{1-0}\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix} = 2x-1 \Rightarrow \begin{vmatrix} f_0 & -x \\ f_1 & 1-x \end{vmatrix} = 2x-1 \Rightarrow f_0 - f_0 x + f_1 x = 2x-1$$

$\underline{f_0 = -1}$, $f_1 - f_0 = 2 \Rightarrow \underline{f_1 = 1}$

$$P_{12}(x) = \frac{1}{2-1}\begin{vmatrix} f_1 & 1-x \\ f_2 & 2-x \end{vmatrix} = 3x-2 \Rightarrow 2f_1 - f_1 x - f_2 + f_2 x = 3x-2$$

$2f_1 - f_2 = -2 \quad f_2 - f_1 = 3$, $\underline{f_1 = 1}$ old. $\underline{f_2 = 4}$

~~$P_{23}(x) = \begin{vmatrix} f_2 & x_2 - x \\ f_3 & x_3 - x \end{vmatrix} \frac{1}{x_3 - x_2} \Rightarrow P_{23}(x) =$~~ Diğer taraftan

$$P_{123}(x) = \frac{1}{x_3 - x_1}\begin{vmatrix} P_{12}(x) & x_1 - x \\ P_{23}(x) & x_3 - x \end{vmatrix} \Rightarrow P_{123}(0,5) = \begin{vmatrix} P_{12}(0,5) & 1-0,5 \\ P_{23}(0,5) & 3-0,5 \end{vmatrix}$$

$P_{123}(0,5) = 3$ old.d $\quad 3 = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ P_{23}(0,5) & 5/2 \end{vmatrix} \Rightarrow 3 = P_{23}(0,5)\cdot(-1/2) + 5/4$

$$P_{23}(0,5) = \left(\frac{5}{4} - 3\right)\cdot 2 = -\frac{7}{2}$$

6) $x_i = x_0 + ih \quad f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}] = \frac{\Delta^m f_i}{h^m m!}$ Tümevarım yönt ile posts

$m=1$ için $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta^1 f_i}{h^1 . 1!}$ doğrudur

$m \leq k$ için $f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}$ olsun. $m = k+1$ için doğru old. göst.

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k+1}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} = \frac{\frac{\Delta^k f_{i+1}}{h^k k!} - \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}}{(k+1)h}$$

$$= \frac{\Delta^k \overbrace{(f_{i+1} - f_i)}^{\Delta f_i}}{h^{k+1}(k+1)!} = \frac{\Delta^{k+1} f_i}{h^{k+1}(k+1)!}$$